# Capitolul 7

# Ecuaţii diferenţiale

Teoria ecuaţiilor şi a sistemelor diferenţiale reprezintă unul din domeniile fundamentale ale matematicii cu largi aplicaţii în tehnică. De exemplu în mecanică, în studiul circuitelor electrice, al oscilaţiilor şi în teoria comenzii automate.

Există ecuaţii în care necunoscuta este o funcţie şi/sau derivatele sale până la un anumit ordin. Astfel de ecuaţii se numesc ecuaţii funcţionale. Printre acestea se află **ecuaţii diferenţiale ordinare** (în care necunoscuta este o funcţie de o singură variabilă independentă), **ecuaţii cu derivate parţiale** (în care necunoscuta este o funcţie de două sau mai multe variabile independente). Procesele descrise de ecuaţii diferenţiale sunt procese continue.

**Definiţia 7.1** *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială** *o relaţie de dependenţă funcţională între variabilele independente, funcţia necunoscută şi derivatele sale. Dacă funcţia necunoscută depinde de o singură variabilă independentă, dependenţă funcţională se numeşte* **ecuaţie diferenţială ordinară**, *iar dacă funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile independente, dependenţă funcţională se numeşte* **ecuaţie cu derivate parţiale.** *Ordinul maxim de derivare al funcţiei necunoscute care este efectiv implicat în ecuaţie poartă denumirea de* **ordinul** *ecuaţiei diferenţiale.*

**Exemplul 7.1** Ecuaţia $x''(t) + x(t) = \sin t$ cu funcţia necunoscută $x$ de variabilă independentă reală $t$ este o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul al doilea, iar ecuaţia $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ cu funcţia necunoscută $u = u(x, y)$, depinzând de variabilele reale independente $x$ şi $y$, este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi.

## 7.1 Ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi

O **ecuaţie diferenţială de ordinul întâi** este o relaţie de dependenţă funcţională de forma:

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0 \tag{7.1}$$

între variabila independentă $t$, funcţia necunoscută $x = x(t)$ şi derivata ei $x' = x'(t)$, iar $F$ este o funcţie definită pe o submulţime $\mathrm{Dom}(F) \subset \mathbb{R}^3$ cu valori în $\mathbb{R}$, neconstantă în raport cu ultima variabilă.

O **ecuaţie difernţială ordinară de ordin** $n$ este de o relaţie funcţională de forma:

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0 \tag{7.2}$$

între variabila independentă $t$, funcţia necunoscută $x = x(t)$ şi derivatele ei $x', \ldots, x^{(n)}$ iar $F$ este o funcţie definită pe o submulţime $\mathrm{Dom}(F) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ cu valori în $\mathbb{R}$, neconstantă în raport cu ultima variabilă.

În anumite condiţii de regularitate asupra funcţiei $F$ (cerute de aplicabilitatea teoremei funcţiilor definite implicit), ecuaţia (7.2) poate fi scrisă sub forma:

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \tag{7.3}$$

numită **forma normală a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordin** $n$.

Forma **normală a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordin întâi** este

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{7.4}$$

**Definiţia 7.2** *Prin* **soluţie** *a ecuaţiei diferenţiale (7.2) înţelegem orice funcţie* $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Int}(\mathbb{I}) \neq \emptyset$, $x = x(t)$, *de clasă* $\mathcal{C}^n(\mathbb{I},\mathbb{R})$ *care satisface condiţiile* $(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) \in \mathrm{Dom}(F)$ *şi* $F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

**Definiţia 7.3** *Prin* **soluţie** *a ecuaţiei diferenţiale (7.1) înţelegem orice funcţie* $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $Int(\mathbb{I}) \neq \emptyset$, $x = x(t)$, *de clasă* $\mathcal{C}^1(\mathbb{I},\mathbb{R})$, *care satisface* $(t, x(t), x'(t)) \in \mathrm{Dom}(F)$ *şi îndeplinind condiţia* $F(t, x(t), x'(t)) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Principala problemă pe care o vom aborda va fi aşa numita **problemă a lui Cauchy** sau problema cu Condiţie (valoare) iniţială referitoare la (7.4).

Mai precis, dat $(t_0, x_0) \in \mathrm{Dom}(f)$, **problema Cauchy** pentru ecuaţia (7.4) cu datele $(t_0, x_0)$ constă în determinarea unei soluţii a ecuaţiei (7.4) $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ cu $t_0 \in \mathbb{I}$ şi $x(t_0) = x_0$.

Vom prezenta mai multe tipuri de ecuaţii diferenţiale ale căror soluţii pot fi determinate prin operaţii de integrare a unor funcţii cunoscute. Aceste ecuaţii poartă denumirea de **ecuaţii rezolvabile prin cuadraturi**.

Prin **cuadratură** înţelegem metoda care constă în reducerea rezolvării unei probleme de analiză matematică la calculul unei integrale definite sau nedefinite. Denumirea provine de la procedeul de calcul al ariei unei figuri plane, foarte utilizat în antichitate, procedeu numit cuadrare deoarece el consta în construirea cu rigla şi compasul a unui pătrat având aceeaşi arie cu aria căutată.

## 7.2 Ecuaţii diferenţiale de ordin întâi

O ecuaţie diferenţială de ordin întâ cu condiţie iniţială este de forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

**Exemplul 7.2** $\begin{cases} x'(t) = e^{-2t} \\ x(0) = 3. \end{cases}$
$x'(t) = e^{-2t} \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C,$
$x(0) = -\frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{7}{2}$
*Soluţia ecuaţiei diferenţiale va fi* $x(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}$.

Nu toate ecuaţiile diferenţiale sunt atît de simple. Studiem câteva tipuri de ecuaţii diferenţiale de ordin întâi.

### 7.2.1 Ecuaţii diferenţiale de ordin întâi cu variabile separabile

Primele ecuaţii cu variabile separabile au fost rezolvate de Isaac Barrow (1630-1677), profesor al lui Isaac Newton (1642-1727), unul din precursorii calculului diferenţial.

Forma generală a unei **ecuaţii diferenţiale de ordin întâi cu variabile separabile** este

$$x'(t) = f(t)g(x(t)) \tag{7.5}$$

unde $\mathbb{I}, \mathbb{J} \subset \mathbb{R}$; $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue cu $g(y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{J}, x : \mathbb{I} \to \mathbb{J}, x$ derivabilă cu derivata continuă.

Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale de ordin întâi cu variabile separabile**:**
Fie $x = x(t), x : (a, b) \to (c, d)$ o soluţie a ecuaţiei (7.5). Se observă că ecuaţia (7.5) poate fi rescrisă sub forma

$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t), \forall t \in (a, b)$.

Integrând această egalitate membru cu membru rezultă

$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt, \forall t \in (a, b)$.

Se obţine $G(x(t)) = \int f(t)dt + C$ unde $G$ este definită prin relaţia $G(u) = \int \frac{du}{g(u)}$.
Se observă că $g$ nu se anulează pe $(c, d)$ şi este continuă, deci păstrează semn constant pe $(c, d)$. Putem presupune că $g(y) > 0, \forall y \in (c, d)$, schimbând eventual semnul funcţiei $f$. Atunci $G$ este bine definită şi strict crescătoare pe $(c, d)$, deci inversabilă. Rezultă

$$x(t, C) = G^{-1}\left(\int f(t)dt + C\right) \tag{7.6}$$

**Exerciţiul 7.1** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x'(t) = \frac{t^2x^2(t)}{1+t^2}, x(t) \neq 0.$

Rezolvare. Scriem ecuaţia sub forma
$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2x^2}{1+t^2} \Rightarrow f(t) = \frac{t^2}{1+t^2}, g(x) = x^2.$
Rezolvăm ecuaţia pentru $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Obţinem
$\frac{dx}{x^2} = \frac{t^2}{1+t^2}dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{t^2}{1+t^2}dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t - \operatorname{arctg} t + C \Rightarrow$
$x(t, C) = \frac{1}{\operatorname{arctg} t - t - C}$.

**Exerciţiul 7.2** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x'(t)\cos t \ln x(t) - x(t) = 0, t \in (0, \frac{\pi}{2}), x > 0, x \neq 1$.

Rezolvare. Scriem ecuaţia sub forma
$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\cos t \ln x} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{\cos t}, g(x) = \frac{x}{\ln x}$.
Pe $(0, \frac{\pi}{2})$, $f$ este continuă, iar pentru $x > 1$, $g$ este continuă şi strict pozitivă, iar pentru $x \in (0, 1)$, $g$ este continuă şi strict negativă. Obţinem
$\frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{\cos t}dt \Rightarrow \int \frac{\ln x(t)}{x(t)}dx = \int \frac{1}{\cos t}dt \Rightarrow$
$\frac{1}{2}\ln^2 |x(t)| = \ln \operatorname{tg} \frac{2t+\pi}{4} + \ln C \Rightarrow$
$x(t, C) = e^{\sqrt{2 \ln C \operatorname{tg} \frac{2t+\pi}{4}}}, C \in \mathbb{R}$.▲

**Exerciţiul 7.3** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x'(t) = tx^2(t) + 2tx(t)$.

Rezolvare. Scriem ecuaţia sub forma
$\frac{dx}{dt} = t\left(x^2 + 2x\right)$
Avem $f(t) = t, g(x) = x^2 + 2x$. Observăm că $x(t) = 0$ şi $x(t) = 2$ sunt soluţii ale ecuaţiei (numite soluţii singulare). Pe orice interval $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{J} \subset (-\infty, 0)$ sau $\mathbb{J} \subset (2, \infty)$ sau $\mathbb{J} \subset (0, 2)$ avem
$\frac{1}{x^2+2x}dx = tdt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)dx = tdt \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| = 2t^2 + \ln C \Rightarrow \left|\frac{x}{x+2}\right| = Ce^{2t^2} \Rightarrow$
$x(t, C) = 2C\frac{e^{2t^2}}{1-Ce^{2t^2}}, x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ şi $x(t, C) = 2C\frac{e^{2t^2}}{-1-Ce^{2t^2}}$, $x \in (0, 2)$.▲

### 7.2.2 Ecuaţii cu diferenţială exactă

Forma generală. Fie $\mathcal{D}$ o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^2$ şi $P$, $Q : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathcal{D}$, cu $Q(t, x) \neq 0$ pe $\mathcal{D}$. O ecuaţie de forma

$$P(t, x(t))dt + Q(t, x(t))dx(t) = 0. \tag{7.7}$$

se numeşte **ecuaţie cu diferenţială exactă** dacă membrul întâi este diferenţiala unei funcţii $F$, adică stisface condiţia

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial P}{\partial x}(t, x), (t, x) \in \mathcal{D}. \tag{7.8}$$

Rezolvarea ecuaţiei cu diferenţială exactă.

Dacă (7.7) este o ecuaţie cu diferenţială exactă, atunci $x$ este soluţie a ecuaţiei dacă şi numai dacă $P(t,x(t))dt + Q(t,x(t))dx(t) = 0$, $\forall (t,x) \in \mathcal{D}$. Membrul întâi a egalităţii este diferenţiala unei funcţii $F$, iar ecuaţia este echivalentă cu $dF(t,x(t)) = 0, \forall (t,x) \in \mathcal{D}$. Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (7.7) este dată de

$$F(t,x(t)) = C.$$

Deoarece $dF(t,x(t)) = P(t,x(t))dt + Q(t,x(t))dx(t)$ avem $P(t,x) = \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)$ şi $Q(t,x) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x)$. De aici rezultă că $\dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(t,x) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(t,x) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x), (t,x)$, care reprezintă relaţia (7.8).

Determinarea lui $F$ se face astfel: considerăm sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = P(t,x) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = Q(t,x) \end{cases}. \tag{7.9}$$

Integrăm ecuaţia care se integrează mai uşor, de exemplu, presupunem că integrăm prima ecuaţie şi obţinem $F(t,x) = \displaystyle\int P(t,x)dt + h(x)$, derivăm funcţia $F$ astfel obţinută în raport cu $x$ şi o egalăm cu expresia ei din a doua ecuaţie din relaţia (7.9). De aici obţinem funcţia $h'$, o integăm şi găsim funcţia $h$.

**Exerciţiul 7.4** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'(t) = -\frac{2tx^3(t) + 2}{3t^2x^2(t) + 8e^{4x(t)}}.$$

Rezolvare. *Scriem* $x'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ şi obţinem

$\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2tx^3 + 2}{3t^2x^2 + 8e^{4x}} \Leftrightarrow \left(2tx^3 + 2\right)dt + \left(3t^2x^2 + 8e^{4x}\right)dx = 0$

$P(t,x) = 2tx^3 + 2$, $Q(t,x) = 3t^2x^2 + 8e^{4x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = 6tx^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 6tx^2$,

Deoarece relaţia (7.8) este satisfăcută rezultă că este o ecuaţie cu diferenţială exactă. Rezultă că există o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$, $F$ astfel încât $\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 2tx^3 + 2$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 3t^2x^2 + 8e^{4x}$. Integrăm prima relaţie în raport cu $t$, $F(t,x) = \displaystyle\int (2tx^3 + 2)dt = 2t + t^2x^3 + h(x)$. Calcuăm derivata în raport cu $x$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 3t^2x^2 + h'(x)$. Egalăm expresiile derivatelor lui $f$ în raport cu $x$ şi obţinem $h'(x) = 8e^{4x} \Rightarrow h(x) = 2e^{4x} + C_1 \Rightarrow F(t,x) = 2t + t^2x^3 + 2e^{4x} + C_1 \Rightarrow F(t,x(t)) = C_2 \Rightarrow 2t + t^2x^3 + 2e^{4x} = C$, $C = C_2 - C_1$.▲

**Exerciţiul 7.5** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$(e^t + x(t) + \sin x(t))dt + (e^{x(t)} + t + t\cos x(t))dx(t) = 0, e^x + t + t\cos x \neq 0.$

Rezolvare.
$P(t,x) = e^t + x + \sin x$, $Q(t,x) = e^x + t + t\cos x$,
$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = 1 + \cos x$, $\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 1 + \cos x$.
Deoarece relaţia (7.8) este satisfăcută rezultă că este o ecuaţie cu diferenţială exactă. Rezultă că există o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$, $F$ astfel încât $\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = (e^t + x + \sin x)$ şi $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = e^x + t + t\cos x$. Integrăm prima relaţie în raport cu $t$, $F(t,x) = \int (e^t + x + \sin x)dt = (e^t + xt + t\sin x) + h(x)$. Calcuăm derivata în raport cu $t$, $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = (t + t\cos x) + h'(x)$. Egalăm expresiile derivatelor lui $f$ în raport cu $x$ şi obţinem $h'(x) = e^x \Rightarrow h(x) = e^x + C_1 \Rightarrow F(t,x) = e^t + xt + t\sin x + e^x + C_1 \Rightarrow F(t,x(t)) = C_2 \Rightarrow e^t + x(t)t + t\sin x(t) + e^{x(t)} = C$, $C = C_2 - C_1$.▲

### 7.2.3 Ecuaţia diferenţială de ordin întâi liniară.

Isaac Newton a rezolvat în 1687 pentru prima dată o ecuaţie diferenţială de ordin întâi liniară.

Forma generală. O **ecuaţie diferenţială de ordin întâi liniară** este o ecuaţie de forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{7.10}$$

unde $a, b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$. Dacă $b \equiv 0$ pe $\mathbb{I}$ ecuaţia se numeşte liniară şi omogenă, iar în caz contrar liniară şi neomogenă.

**Teorema 7.1** *Soluţia generală a ecuaţiei (7.10) în condiţiile $a, b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$, este de forma:*

$$x(t,C) = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right) \tag{7.11}$$

*Demonstraţie.* Prezentăm două metode de rezolvare a acestei ecuaţii diferenţiale.

Prima metodă este **metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange**. Soluţia generală a ecuaţiei (7.10) $x(t,C)$ se scrie ca sumă dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene, $x_o(t,C)$ şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, $x_p(t)$, deci $x(t,C) = x_o(t,C) + x_p(t)$. Justificăm afirmaţia făcută. Dacă $x_o$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene, ea depinde de o constantă arbitrară $C$ şi satisface ecuaţia $x_0'(t,C) = a(t)x_0(t,C), \forall x \in \mathbb{I}$. De asemenea $x_p$ satisface ecuaţia $x_p'(t) = a(t)x_p(t) + b(t)$.

$x_0'(t,C) = a(t)x_0(t,C)$
$x_p'(t) = a(t)x_p(t) + b(t)$
Adunând aceste două ecuaţii rezultă

că $x_p'(t) + x_o'(t,C) = a(t)(x_p(t) + x_o(t,C)) + b(t)$.

*Etapa I.* Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene. Fie ecuaţia omogenă $x'(t) = a(t)x(t)$ care este o ecuaţie cu variabile separabile. Soluţia ei este $x_o(t,C) = Ce^{\int a(t)dt}, C \in \mathbb{R}$.

*Etapa II.* Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma soluţiei ecuaţiei omogene, presupunând constanta ca funcţie necunoscută, $x(t) = u(t)e^{\int a(t)dt}$ unde $u$ este o funcţie derivabilă. Funcţia necunoscută se determină impunând condiţia ca funcţia $x(t) = u(t)e^{\int a(t)dt}$ să verifice ecuaţia neomogenă. Rezultă că $u'(t) = e^{-\int a(t)dt}b(t) \Rightarrow u(t) = \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt$ (nu am menţionat constanta deoarece căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene). Deci $x_p(t) = e^{\int a(t)dt}\int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt$.

$x(t,C) = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right)$ este soluţia generală a ecuaţiei (7.10).

În 1775 Joseph Lagrange (1736-1813) introduce metoda variaţiei constantelor.

A doua metodă utilizează următorul artificiu: se înmulţeşte ecuaţia (7.10) cu $e^{-\int a(t)dt}$ şi obţinem:

$x'(t)e^{-\int a(t)dt} = a(t)x(t)e^{-\int a(t)dt} + b(t)e^{-\int a(t)dt} \Leftrightarrow$

$x'(t)e^{-\int a(t)dt} - a(t)x(t)e^{-\int a(t)dt} = b(t)e^{-\int a(t)dt} \Leftrightarrow$

$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{-\int a(t)dt}\right) = b(t)e^{-\int a(t)dt} \Leftrightarrow$

$x(t)e^{-\int a(t)dt} = \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt + C \Leftrightarrow x(t,C) = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right)$. ♦

**Exerciţiul 7.6** Să se determine soluţia ecuaţiei

$$\begin{cases} tx'(t) + x(t) = 3t^2, t \neq 0 \\ CI : x(1) = 1 \end{cases}.$$

Rezolvare. Metoda variaţiei constantelor.

$x'(t) = -\frac{x(t)}{t} + 3t$

Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene

$tx'(t) + x(t) = 0 \Leftrightarrow x'(t) = -\frac{x(t)}{t}, x(t) \neq 0, t \neq 0.$

Este o ecuaţie cu variabile separabile. Rezolvăm ecuaţia

$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|t| + \ln|C| \Leftrightarrow x_0(t) = \frac{C}{t}$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma $x_p(t) = \frac{u(t)}{t}$. Impunem condiţia să verifice ecuaţia neomogenă.

$\frac{u'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t^2} + \frac{u(t)}{t^2} = 3t \Rightarrow u'(t) = 3t^2 \Rightarrow u(t) = t^3$.

Rezultă că $x_p(t) = t^2$. Soluţia generală este $x(t, C) = x_0(t) + x_p(t) = \frac{C}{t} + t^2$.

$x(1) = C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = t^2$.

Utilizând a doua metodă, scriem ecuaţia diferenţială sub forma normală

$x'(t) = -\frac{x(t)}{t} + 3t$.

Înmulţim ecuaţia diferenţială cu $e^{\int \frac{1}{t}dt} = t$,

$tx'(t) = -x(t) + 3t^2 \Rightarrow tx'(t) + x(t) = 3t^2 \Rightarrow (tx(t))' = 3t^2 \Rightarrow tx(t) = t^3 + C$. Soluţia generală este $x(t, C) = \frac{t^3 + C}{t} = \frac{C}{t} + t^2$.

$x(1) = C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = t^2$.▲

**Exerciţiul 7.7** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$x'(t) + \frac{t}{1-t^2}x(t) = t + \arcsin t, t \in (-1, 1)$.

Rezolvare. Metoda variaţiei constantelor. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene

$x'(t) + \frac{t}{1-t^2}x(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = -\frac{t}{1-t^2} \Leftrightarrow \int \frac{x'(t)}{x(t)}dt = -\int \frac{t}{1-t^2}dt \Leftrightarrow$

$\ln x(t) = \frac{1}{2}\ln(1-t^2) + \ln C \Leftrightarrow x_0(t) = C\sqrt{1-t^2}$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma $x_p(t) = u(t)\sqrt{1-t^2}$. Impunem condiţia să verifice ecuaţia neomogenă.

$u'(t)\sqrt{1-t^2} - u(t)\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{1-t^2}u(t)\sqrt{1-t^2} = t + \arcsin t \Leftrightarrow$

$u'(t)\sqrt{1-t^2} = t + \arcsin t \Leftrightarrow u'(t) = \frac{t + \arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} \Leftrightarrow \int u'(t)dt = \int \frac{t + \arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt \Leftrightarrow$

$u(t) = -\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin^2 t$.

Rezultă că $x_p(t) = \left(-\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin^2 t.\right)\sqrt{1-t^2}$, iar soluţia generală este

$x(t, C) = x_0(t) + x_p(t) = C\sqrt{1-t^2} - (1-t^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\arcsin^2 t$.

Utilizând a doua metodă, înmulţim ecuaţia diferenţială cu $e^{\int \frac{t}{1-t^2}dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ şi obţinem

$x'(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{1-t^2}x(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t \Leftrightarrow$

$\frac{d}{dt}\left(x(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) = t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t \Leftrightarrow$

$x(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \int \left(t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\right)dt \Leftrightarrow$

$x(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin^2 t + C \Leftrightarrow$

$x(t,C) = C\sqrt{1-t^2} - (1-t^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\arcsin^2 t.\blacktriangle$

### 7.2.4 Modele matematice descrise de ecuaţii diferenţiale

**Dezintegrarea unei substanţe radioactive**. În anul 1902, Ernest Rutherford (1871-1937) şi Frederick Soddy (1877-1957) au formulat legea dezintegrării atomilor radioactivi care afirmă că viteza instantanee de dezintegrare a unui element radioactiv este proporţională cu numărul de atomi radioactivi existenţi la momentul considerat şi nu depinde de alţi factori externi. Deci dacă notăm cu $x(t)$ numărul de atomi dezintegraţi la momentul $t$ şi presupunând că $x$ este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $[0,\infty)$, conform legii enunţate anterior, deducem că

$-x' = ax, \forall t \in [0,\infty)$, unde $a > 0$ este o constantă specifică elementului respectiv, numită constantă de dezintegrare şi care poate fi determinată experimental cu o precizie destul de bună.

Soluţia generală este dată de

$x(t) = Ce^{-at} = x(0)e^{-at}$

pentru $t \geq 0, C \in \mathbb{R}_+$. Subliniem că acest model simplu se bazează pe metoda de datare cu izotopul de carbon 14 radioactiv. Alegerea izotopului de carbon 14 radioactiv s-a bazat pe simpla observaţie că toate substanţele organice îl conţin. Metoda constă în determinarea la un moment dat $T > 0$ a numărului de atomi $x(T)$ a acestui izotop dintr-un obiect de origine organică. Din cele precizate anterior rezultă că $x(T) = x(0)e^{-aT}$ unde $x(0) > 0$ este numărul de atomi de izotop de carbon 14 la momentul iniţial, care este practic cunoscută. În relaţia de mai sus atât $x(0)$ cât şi $x(T)$ sunt cunoscute aşa încât putem determina vechimea obiectului reprezentată prin $T$.

**Un model demografic**. Primul model matematic al creşterii populaţiei a fost propus în 1798 de către Thomas Robert Malthus (1766-1834). Notând cu $x(t)$ un număr de indivizi la momentul $t$ şi cu $y(t)$ cantitatea de resurse utilizate pentru supravieţuire, după Malthus, viteza instantanee de creştere a resurselor este constantă. Avem atunci un model matematic exprimat prin două ecuaţii diferenţiale de forma

$\begin{cases} x'(t) = Cx(t) \\ y'(t) = k \end{cases}, C, k \in \mathbb{R}_+.$

Soluţia generală este dată de

$\begin{cases} x(t,\xi) = \xi e^{Ct} \\ y(t,\eta) = \eta + kt \end{cases}$,

unde $t \geq 0, \xi$ şi $\eta$ reprezintă numărul de indivizi şi respectiv cantitatea de resurse la momentul $t = 0$. Se constată că acest model descrie relativ bine fenomenul real numai pe intervale foarte scurte de timp. Din acest motiv au fost propuse alte modele mai rafinate şi în acelaşi timp mai realiste care pornesc de la observaţia că numărul de indivizi la un moment dat nu poate depăşi un anumit prag critic care depinde de resursele din acel moment. Astfel, dacă notăm cu $h > 0$ cantitatea de hrană necesară unui individ pentru a supravieţui momentului $t$, putem presupune că $x$ şi $y$ verifică un sistem de forma

$$\begin{cases} x'(t) = Cx(t)\left(\frac{y(t)}{h} - x(t)\right) \\ y'(t) = k, \end{cases}$$

care exprimă o legătură mai firească între evoluţia resurselor şi creşterea sau descreşterea populaţiei. În unele modele, precum cel propus de Verhulst în 1845, pentru simplitate se consideră $k = 0$, ceea ce exprimă matematic faptul că resursele sunt constante în timp ($y(t) = \eta, \forall t \geq 0$), ajungându-se la o ecuaţie diferenţială de forma

$x'(t) = Cx(t)(b - x(t))$

numită ecuaţia logistică şi ea este o ecuaţie cu variabile separabile.

## 7.3 Existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy

Vom prezenta pe scurt principalele momente din evoluţia studiului problemei cu valori iniţiale numită şi problemă Cauchy. Aceasta constă în determinarea unei soluţii $x = x(t)$ a unei ecuaţii diferenţiale, care pentru o valoare dată $t_0$ ia o valoare precizată $x_0$.

Numeroase ecuaţii diferenţiale nu pot fi rezolvate explicit. De aceea s-au căutat condiţii suficiente cât mai generale asupra datelor unei probleme cu valori iniţiale pentru ca aceasta să admită cel puţin o soluţie. Primul care a stabilit un rezultat notabil în acest sens a fost Augustin Cauchy (1789-1857) care, în 1820, a utilizat metoda liniilor poligonale pentru a demonstra existenţa locală (nu şi unicitatea) pentru problema cu valori iniţiale al cărui membru drept este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$. Metoda, îmbunătăţită de Lipschitz (1832-1903) a fost impusă în cadrul cel mai general de către Giuseppe Peano (1858-1932) în 1890.

Un alt pas important în ceea ce priveşte problema aproximării soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale a fost făcut în 1890 de către Emile Picard (1856-1941) când a introdus **metoda aproximaţiilor succesive**, devenind curând foarte cunoscută.

După cum am văzut, principala preocupare a matematicienilor secolelor XVII-XVIII, referitoare la ecuaţiile diferenţiale, a fost de a pune în evidenţă unele metode eficiente, fie de determinare explicită a soluţiilor, fie de aproximare a lor. Din păcate s-a constatat că aceste obiective sunt rareori realizabile. În conferinţa ţinută în cadrul Congresului Internaţional al Matematicienilor din 1908 Henri Poincaré a afirmat: "În trecut o ecuaţie era considerată rezolvată numai dacă se exprima soluţia cu ajutorul unui număr finit de funcţii cunoscute; dar aceasta este greu de realizat într-un caz dintr-o sută. Ceea ce putem face întotdeauna, sau mai degrabă ceea ce putem întotdeauna încerca să facem, este de a rezolva să spunem problema calitativă, adică să încercăm să găsim forma curbei ce reprezintă funcţia necunoscută."

## 7.4 Existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy

Fie mulţimea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ dreptunghiul (mulţime compactă) de forma

$\mathcal{D} = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\}$

şi fie funcţia $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

**Problema Cauchy** ataşată unei ecuaţii diferenţiale de ordin întâi constă în găsirea unei funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$, $x = x(t)$, definită pe un interval $\mathbb{I} \subset [t_0 - a, t_0 + a]$ satisfăcând $x'(t) = f(t, x(t))$, $\forall t \in \mathbb{I}$ şi $t_0 \in \mathbb{I}$ şi $x(t_0) = x_0$. Vom nota o astfel de problemă prin

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{7.12}$$

**Definiţia 7.4** *O funcţie $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile de mai sus se numeşte* **soluţie** *pentru problema (7.12).*

**Definiţia 7.5** *Funcţia $f = f(t, x)$, definită pe $\mathcal{D}$, satisface* **condiţia Lipschitz locală** *în raport cu variabila $x$, dacă pentru orice punct $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ există o vecinătate $\mathcal{V}(t_0, x_0) \subset \mathcal{D}$, astfel încât oricare ar fi $(t, x)$ şi $(t, \overline{x})$ din $\mathcal{V}(t_0, x_0)$, are loc inegalitatea*

$$|f(t, x) - f(t, \overline{x})| \leq L\,|x - \overline{x}| \tag{7.13}$$

*constanta $L > 0$ depinzând, în general, de punctul $(t_0, x_0)$.*

În acest caz vom spune că $f$ este **local lipschitziană** în raport cu variabila $x$ (a doua variabilă). Dacă inegalitatea (7.13) este satisfăcută cu aceeaşi constantă pentru orice pereche de puncte $(t, x)$ şi $(t, \overline{x})$ din $\mathcal{D}$, vom spune că $f$ satisface pe $\mathcal{D}$ **condiţia Lipschitz globală în raport cu variabila** $x$.

**Observaţia 7.1** Dacă $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ există şi este local mărginită în $\mathcal{D}$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leq C$, condiţia Lipschitz amintită este satisfăcută. Într-avevăr, dacă aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei $f(t, x)$ în raport cu a doua variabilă obţinem $f(t, x) - f(t, \overline{x}) = (x - \overline{x})\dfrac{\partial f}{\partial x}(s)$, $s$ fiind un punct intermediar din intervalul determinat de $x$ şi $\overline{x}$, atunci $|f(t, x) - f(t, \overline{x})| = |x - \overline{x}| \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(s)\right| \leq C\,|x - \overline{x}|$. Constanta Lipschitz este în acest caz $C$.

**Teorema 7.2** *(***Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy ecuaţiei diferenţiale de ordin întâi***)*

*Dacă $f = f(t, x)$ este continuă în $\mathcal{D}$ şi local lipschitziană în raport cu variabila $x$, atunci pentru orice punct $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ există o soluţie unică $x = x(t)$ a ecuaţiei (7.12), definită într-o vecinătate suficient de mică a lui $t_0, |t - t_0| \leq h$ unde $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, unde $M = \sup\limits_{(t,x)\in\mathcal{D}} |f(t, x)|$ şi îndeplinind condiţia $x(t_0) = x_0$.*

*Demonstraţie.* În ipoteza că există o soluţie a problemei Cauchy (7.12), $y = y(t)$, vom avea

$y'(t) = f(t, y(t)), \forall t \in \mathbb{J}$ şi $y(t_0) = x_0$. Deoarece $y'$ şi $f$ sunt funcţii continue avem:

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, y(s)\right) ds. \tag{7.14}$$

Orice soluţie a lui (7.12) este şi soluţie a lui (7.14) şi reciproc.

Pentru a demonstra teorema vom arăta că ecuaţia (7.14) admite soluţie continuă pe intervalul $|t - t_0| \leq h$ unde $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$. Deoarece $f$ este continuă pe un interval compact rezultă că există $M = \sup\limits_{(t,x)\in\mathcal{D}_1} |f(t, x)|$ (teorema lui Weierstass afirmă că orice funcţie continuă pe un compact îşi atinge efectiv marginile).

Condiţia $x(t_0) = x_0$ este echivalentă cu următoarea interpretare geometrică: graficul soluţiei trece prin punctul de coordonate $(t_0, x_0)$.

Pentru determinarea soluţiei $y = y(t)$ vom folosi *metoda aproximaţiilor succesive.* Metoda constă în a construi un şir de funcţii continue, $(y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ care să conveargă uniform pe mulţimea $|t - t_0| \leq h$ către o funcţie continuă $y(t)$, soluţie a ecuaţiei (7.14).

Definim şirul aproximaţiilor succesive prin relaţia de rcurenţă

$$y_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, y_{n-1}(s)\right) ds, \tag{7.15}$$

Demonstrăm că **şirul** $(y_n(t))_{n\in N}$ **are următoarele proprietăţi**:

- **verifică condiţia iniţială** $y_n(t_0) = x_0$, (integrala din (7.15) este nulă);

- **toţi termenii şirului sunt funcţii continue pe intervalul** $[t_0 - h, t_0 + h]$ deoarece $f$ este continuă şi toate intergralele care intervin sun funcţii continue;

- pentru $t \in [t_0 - h, t_0 + h] \Rightarrow y_n(t) \in [x_0 - b, x_0 + b], \forall n \in \mathbb{N}$. Demonstrăm prin inducţie. Avem: $|f(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in \mathcal{D}$ deci

$$|y_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_0) ds \right| \leq M\,|t - t_0| \leq Mh \leq b \text{ deoarece } h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Presupunem că $y_{n-1}(t)$ satisface condiţia $y_{n-1}(t) \in [x_0 - b, x_0 + b]$; de aici rezultă că $|f(t, y_{n-1}(t))| \leq M$, $\forall (t, x) \in \mathcal{D}$.

Putem scrie mărginirea $|y_n(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s)) ds \right| \leq M\,|t - t_0| \leq Mh \leq b$ deoarece $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, adică toate aproximaţiile succesive aparţin intervalului $[x_0 - b, x_0 + b]$.

- **şirul** $(y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniform pe mulţimea** $|t - t_0| \leq h$ **către o funcţie continuă** $y(t)$ când $n \to \infty$.

Convergenţa acestui şir este echivalentă cu convergenţa seriei de funcţii

$$y_0 + (y_1(t) - y_0) + (y_2(t) - y_1(t)) + \ldots + (y_n(t) - y_{n-1}(t)) + \ldots \tag{7.16}$$

deoarece şirul sumelor parţiale ale seriei (7.16) este şirul $(y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$.

Pentru a arăta că seria (7.16) converge uniform pe intervalul considerat este suficient să arătăm că este majorată de o serie numerică cu tremeni pozitivi convergentă (criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă). Arătăm că pentru $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq ML^{n-1}\frac{|t - t_0|^n}{n!}, n = 1, 2, \ldots \tag{7.17}$$

Demonstrăm inegalitatea (7.17) prin inductie. Avem:

$$|y_1(t) - x_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds\right| \leq M\,|t - t_0|\,.$$

Presupunem inegalitatea adevărată pentru $n - 1$,

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq ML^{n-2}\frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

şi arătăm că este adevărată pentru $n$; avem, folosind conditia lui Lipschitz,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \left|\int_{t_0}^{t} [f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))]\,ds\right| \leq L\left|\int_{t_0}^{t} [y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)]\,ds\right| \leq$$

$$\leq L\left|\int_{t_0}^{t} ML^{n-2}\frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}ds\right|$$

sau $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq ML^{n-1}\left|\int_{t_0}^{t}\frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}ds\right| \leq ML^{n-1}\frac{|t - t_0|^n}{n!}$.

Deoarece $|t - t_0| \leq h$ avem $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \frac{M}{L}\frac{(Lh)^n}{n!}, \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{(Lh)^n}{n!} = \frac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Lh)^n}{n!}$ este convergentă (folosim criteriul raportului), rezultă că seria $y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n(t) - y_{n-1}(t))$ este absolut si uniform convergentă pentru $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Rezultă că limita sirului de aproximatii este o functie continuă. Fie $y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t)$. Trecând la limită în relatia (7.15) obtinem că $y$ veifică (7.14).

**Demonstrăm că $y$ este soluţia căutată**. Din (7.14) se observă că $x(t_0) = x_0$ (integrala va fi nulă) şi deoarece funcţia definită cu ajutorul integralei din (7.14) este continuă şi derivabilă, rezultă că $y \in \mathcal{C}^1([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R})$ iar prin derivarea relaţiei (7.14).

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, y(s)\right) ds\right) = f(t, y(t))$$

şi ecuaţia diferenţială (7.12) este verificată.

**Unicitatea solutiei**. Presupunem că problema ar mai admite o solutie $\varphi(t)$ care satisface aceeasi conditie initială si deci $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \varphi(s)\right) ds$. Atunci

$$|y_n(t) - \varphi(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, \varphi(s))\right] ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \left[y_{n-1}(s) - \varphi(s)\right] ds \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} ML^{n-2} \frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} ds \right| \leq ML^{n-1} \frac{|t - t_0|^n}{n!} \leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^n}{n!}, \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

de unde deducem că $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = \varphi(t) = y(t)$♦

**Observaţia 7.2** Caracterul local al teoremei precedente este evident, deoarece ea ne garantează existenţa soluţiei **numai pe un interval suficient de mic, cu centrul în** $t_0$.

**Observaţia 7.3** Dacă se renunţă la condiţia Lipschitz, admiţând numai că $f$ este continuă în $D$, teorema lui Peano afirmă că prin orice punct $(t_0, x_0) \in D$ trece cel puţin un grafic al unei soluţii a ecuaţiei (7.12). În aces caz avem garantată numai existenţa locală a soluţiei pentru care $x(t_0) = x_0$, nu şi unicitatea ei. De asemenea, nu putem garanta că de data aceasta şirul aproximaţiilor succesive este uniform convergent la soluţia respectivă; în demonstraţia Teoremei 7.2 se folosea în mod esenţial faptul că $f$ este local lipschitziană în raport cu $x$.

**Exemplul 7.3** Considerăm problema Cauchy,

$$\begin{cases} x'(t) = x^{2/3}(t) \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

cu membrul al doilea funcţie continuă $f(t, x) = x^{2/3}$. Observăm că $x(t) \equiv 0$ este soluţie a problemei puse, dar şi $x(t) = (1/27)(t - t_0)^3$ este tot o soluţie a problemei. În acest caz, prin punctul $(t_0, 0)$ trec graficele a două soluţii distincte ale ecuaţiei date; aceasta se explică prin aceea că funcţia $f(t, x) = x^{2/3}$ nu este lipschitziană în raport cu variabila $x$, în nici o vecinătate a punctului $(t_0, 0)$.

Noţiunea de sistem diferenţial este o generalizare a noţiunii de ecuaţie diferenţială şi, de obicei, într-un sistem diferenţial, numărul ecuaţiilor este egal cu numărul funcţiilor necunoscute.

**Definiţia 7.6 Forma normală a unui sistem diferenţial de ordin întâi** *cu $n$ funcţii necunoscute $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este:*

$$\begin{cases} y_1'(t) = g_1\left(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\right) \\ y_2'(t) = g_2\left(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\right) \\ \ldots \\ y_n'(t) = g_n\left(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\right) \end{cases} \tag{7.18}$$

*unde funcţiile* $g_i = g_i(t, y_1, \dots, y_n), i = \overline{1,n}$ *sunt definite şi continue pe* $\mathcal{D} = \mathbb{I} \times \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ *cu valori reale.*

Dacă $\mathbf{g}: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ şi notăm $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$, $\mathbf{g}(t, \mathbf{y}) = (g_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, g_1(t, y_1, \dots, y_n))$ obţinem scrierea vectorială a sistemului diferenţial de ordin întâi cu $n$ funcţii necunoscute (7.18) (care poate fi privită ca o ecuaţie diferenţială vectorială de ordin întâi) de forma:

$$(\mathbf{y}'(t))^T = \mathbf{g}^T(t, \mathbf{y}(t)). \tag{7.19}$$

**Definiţia 7.7** *O* **soluţie** *a sistemului de ecuaţii diferenţiale de ordin întâi (7.19) este o* $n-$*uplă de funcţii* $(y_1, \dots, y_n) : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ *de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe intervalul cu interior nevid* $\mathbb{I}$*, care satisface* $(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \in Dom(\mathbf{g})$ *şi verifică (7.19) pentru orice* $t \in \mathbb{I}$.
**Definiţia 7.8 Problema Cauchy** *pentru sistemul diferenţial (7.19) constă în determinarea unei soluţii* $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ *care verifică condiţiile* $y_i(t_0) = y_{i0} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}, t_0 \in \mathbb{I}$. *Numerele* $t_0, y_{i0}, i = \overline{1,n}$, *se numesc* **condiţii iniţiale**.

**Definiţia 7.9** *O soluţie a sistemului diferenţial (7.19) care satisface condiţiile iniţiale date, se numeşte* **soluţie particulară**.

**Definiţia 7.10** *Funcţia* $\mathbf{g}: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *satisface* **condiţia Lipschitz locală** *în raport cu variabila vectorială* $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, *dacă pentru orice punct* $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{D}$, *unde* $\mathbf{y}_0 = (y_{10}, \dots, y_{n0})$, *există o vecinătate* $\mathcal{V}(t_0, \mathbf{y}_0) \subset \mathcal{D}$, *astfel încât oricare ar fi* $(t, \mathbf{y})$ *şi* $(t, \overline{\mathbf{y}})$ *din* $\mathcal{V}(t_0, \mathbf{y}_0)$, *are loc inegalitatea*

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, \overline{\mathbf{y}})\| \leq L \|\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}\| \tag{7.20}$$

*constanta* $L > 0$ *depinzând, în general, de punctul* $(t_0, \mathbf{y}_0)$.
**Teorema 7.3** *(***Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy pentru sisteme diferenţiale de ordin întâi***)*

*Dacă funcţia vectorială* $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$ *este continuă în* $\mathcal{D}$ *şi local lipschitziană în raport cu variabila vectorială* $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, *atunci pentru orice punct* $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathcal{D}$ *există o soluţie unică* $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ *a sistemului (7.19), definită într-o vecinătate suficient de mică a lui* $t_0$ *şi îndeplinind condiţiile* $y_i(t_0) = y_{i0} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$.

## 1. Ecuaţii diferenţiale integrabile prin cuadraturi

**Exerciţiul 1.** *Să se arate că, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, funcţia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de*

$$x(t) = ct + \sqrt{1 + c^2},$$

*este soluţie a ecuaţiei diferenţiale ordinare*

$$x(t) - tx'(t) = \sqrt{1 + (x'(t))^2}, t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

**Rezolvare:** Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, $x$ e funcţie derivabilă, cu

$$x' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x'(t) = c$$

şi cu derivata continuă ;

Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}$, $x$ verificăm ecuaţia (1), adică

$$ct + \sqrt{1 + c^2} - tc = \sqrt{1 + c^2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Exerciţiul 2.** *Se dă ecuaţia difenţială :*

$$x'(t) = x(t), t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

*a) Să se determine soluţiile ecuaţiei.*
*b) Să se reprezinte grafic soluţiile.*
*c) Să se adauge o condiţie care să asigure unicitatea soluţiei.*

**Rezolvare:** a) Se observă că

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = 0,$$

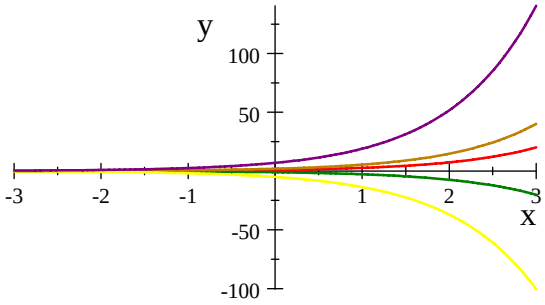
este soluţie pentru ecuaţiei (2), numită **soluţie singulară**. Căutăm şi alte soluţii decât cea singulară.

$(2) \Rightarrow \left.\dfrac{x'(t)}{x(t)} = 1, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0\right| \Rightarrow \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int dt \Rightarrow$
$\ln|x(t)| = t + \ln k, \forall t \in \mathbb{R}$ a.î. $x(t) \neq 0$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$
$|x(t)| = ke^t, \forall t \in \mathbb{R}$ a.î. $x(t) \neq 0$ şi $k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$
$x(t, c) = ce^t, \forall t \in \mathbb{R}$ a.î. $x(t) \neq 0$ şi $c \in \mathbb{R}^*$.

Putem afirma că soluţia generală a ecuaţiei (2) este dată sub formă explicită, pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$, de

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x(t) = ce^t, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

b) Considerăm sistemul cartezian de coordonate $tOx$. Soluţia singulară are drept reprezentare grafică curba integrală singulară dată de axa $Ot$. Pentru fiecare $c \in \mathbb{R}^*$ reprezentăm grafic şi curbele integrale date de (ec3). Obţinem




c) A adăuga o condiţie care să asigure unicitatea soluţiei revine la a adăuga o condiţie care să asigure alegerea unei curbe unice în plan care să fie reprezentare pentru soluţia ecuaţiei, şi reciproc.

A alege din familia de curbe integrale din plan o curbă care trece prin $M(t_0, x_0)$ din plan (dacă există, dacă e unică) revine la a impune asupra ecuaţiei condiţia iniţială $CI : x(t_0) = x_0$. Şi reciproc.

De exemplu, impunem asupra ecuaţiei (2) condiţia $CI : x(0) = 0$. Încercăm să determinăm acea soluţie particulară din cea generala (2) ce verifică $x(0) = 0$. Din

$$ce^0 = 0, c \in \mathbb{R}^* \Rightarrow c = 0, c \in \mathbb{R}^*.$$

Imposibil. Încercăm şi obţinem că soluţia singulară $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = 0$, este unica ce verifică $x(0) = 0$.

Impunem $x(0) = 1$. Încercăm să determinăm acea soluţie particulară din cea generala (3) ce verifică $x(0) = 1$. Din

$ce^0 = 1, c \in \mathbb{R}^* \Rightarrow c = 1, c \in \mathbb{R}^*$.

Am găsit că soluţia particulară $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = e^t$ este unica ce verifică $x(0) = 1$.

**Exerciţiul 3.** *Dozajul medicamentelor. Este cunoscut din medicină că penicilina şi alte medicamente administrate unui pacient dispar din corpul acestuia după următoarea regulă: dacă $x(t)$ este cantitatea de medicament din corpul uman la momentul $t$ atunci viteza de eliminare $x'(t)$ a medicamentului este proporţională cu $x(t)$ adică $x$ satisface ecuaţia diferenţială*

$$x'(t) = -kx(t), \tag{4}$$

*unde $k > 0$ este o constantă ce depinde de medicament şi care se determină experimental.*

**Rezolvare.** Din (4) rezultă $x(t) = ce^{-kt}$. Dacă $x_0 = x(0)$ este doza administrată la momentul iniţial atunci $x(t) = x_0 e^{-kt}$.

În practica medicală este necesar să se menţină o anumită concentraţie a medicamentului în corp pentru un timp mai îndelungat. În acest scop se administrează pacientului o doză iniţială $x_0$, apoi la intervale egale de timp, $\tau$ ore de exemplu, se dă pacientului doza $D$ de medicament. Dacă dorim ca în corpul pacientului la momentele $\tau, 2\tau, 3\tau...$ să se meţină doza iniţială $x_0$, atunci doza $D$ care trebuie administrată în aceste momente se determină din relaţia

$x_0 e^{-k\tau} + D = x_0$

de unde $D = x_0\left(1 - e^{-k\tau}\right)$. Menţionăm faptul că ecuaţia (4) caracterizează si dezintegrarea radioactivă.

**Exerciţiul 4.** *Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale cu variabile separabile :*

*a)* $tx'(t) = x^3(t) + x(t)$, *b)* $tdx(t) - x(t)\,dt = x^2(t)\,dt$,

*c)* $\sqrt{1+t^2}\dfrac{dx}{dt}(t) + \sin x(t) = 0$, *d)* $x'(t)\operatorname{tg} t - x(t) = 0, t \neq k\frac{\pi}{2}$,

*e)* $t^2(x(t)+1)dt + (t^3-1)(x(t)-1)dx(t) = 0$,

*f)* $tdx(t) - x(t)dt = x^2(t)dt$, *g)* $(1+e^t)x(t)x'(t) - e^t = 0, x(0) = 1$

*h)* $\begin{cases} (1+e^t)\,x(t)\,x'(t) = e^t \\ x(0) = 1; \end{cases}$, *i)* $\begin{cases} 1 + x^2 + txx' = 0 \\ x(1) = 0; \end{cases}$

*j)* $t^3 x'(t)\sin x(t) = 2, \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \dfrac{\pi}{2}$

**Rezolvare :** a) Scriem ecuaţia sub formă normală

$x'(t) = \dfrac{1}{t}\left(x^3(t) + x(t)\right)$.

Observăm că este o ecuaţie cu variabile separabile cu $f(t) = \dfrac{1}{t}$ şi $g(x) = x^3 + x$. Pentru a o rezolva impunem condiţiile $t \neq 0, x^3 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$.

Căutăm soluţiile nenule ale ecuaţiei diferenţiale

$x'(t) = \dfrac{1}{t}\left(x^3(t) + x(t)\right) \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}\left(x^3 + x\right) \Rightarrow \dfrac{dx}{x^3+x} = \dfrac{1}{t} \Rightarrow$

$\int \dfrac{dx}{x^3+x} = \int \dfrac{1}{t}dt \Rightarrow \int\left[\dfrac{dx}{x} - \dfrac{xdx}{x^2+1}\right] = \int \dfrac{1}{t}dt \Rightarrow$

$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| = \ln|t| + \ln c$, $c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $c \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$

$\dfrac{|x^2|}{|x^2+1|} = c^2|t|^2 \Rightarrow \dfrac{x^2(t)}{x^2(t)+1} = c^2|t|^2$.

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(a)$ sub formă implicită.

Se poate obţine şi soluţia sub formă explicită:

$x(t,c) = \pm\sqrt{\frac{ct^2}{1-ct^2}}, \forall t : \frac{ct^2}{1-ct^2} \geq 0.$

Am lucrat în condiţia $x(t) \neq 0$. Observăm că $x(t) = 0$ este soluţie pentru ecuaţia dată numită soluţie singulară (soluţia singulară se defineşte ca fiind soluţia care nu se poate obţine din soluţia generală printr-o particularizare a constantei arbitrare).

d) Forma normală

$x'(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)\,x(t)}.$

Este o ecuaţie cu variabile separabile, $f(t) = \frac{e^t}{1+e^t}, g(x) = \frac{1}{x}$.

Rezolvăm ecuaţia

$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{(1+e^t)\,x} \Rightarrow xdx = \frac{e^t}{1+e^t}dt \Rightarrow \int xdx = \int \frac{e^t}{1+e^t}dt \Rightarrow$

$\frac{x^2}{2} = \ln\left(1+e^t\right) + c,$

$$\frac{x^2(t)}{2} = \ln\left(1+e^t\right) + c, c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(d)$ sub formă implicită. Putem afirma şi că soluţia generală a ecuaţiei $(d)$ este dată sub formă explicită, pentru $c \in \mathbb{R}$, de următoarele două familii de funcţii

$$x(t,c) = \sqrt{2\left(\ln\left(1+e^t\right)+c\right)}, \forall t : \left(\ln\left(1+e^t\right)+c\right) \geq 0,$$

$$x(t,c) = -\sqrt{2\left(\ln\left(1+e^t\right)+c\right)}, \forall t : \left(\ln\left(1+e^t\right)+c\right) \geq 0.$$

Determinăm acea soluţie particulară a ecuaţiei $(d)$ ce verifică $CI : x(0) = 1$. Înlocuim $CI$ în relaţia (5) şi obţinem $\frac{1}{2} = \ln\left(1+e^0\right) + c \Rightarrow c = \frac{1}{2} - \ln 2$.Înlocuim această constantă în (5) şi obţinem

$$\frac{x^2(t)}{2} = \ln\left(1+e^t\right) + \frac{1}{2} - \ln 2, \forall t \in \mathbb{I}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia particulară a ecuaţiei $(d)$ ce verifică $CI : x(0) = 1$, sub formă implicită (acea ramură cu $x(t) \geq 0$ din $x(0) = 1 \geq 0$). Putem afirma şi că soluţia pariculară a ecuaţiei $(d)$ este dată sub formă explicită de

$$x(t) = \sqrt{2\left(\ln\left(1+e^t\right) + \frac{1}{2} - \ln 2\right)}, \forall t \in \mathbb{I},$$

unde domeniul de definiţie a soluţiei se obţine din $2\left(\ln\left(1+e^t\right) + \frac{1}{2} - \ln 2\right) \geq 0$.

**Exerciţiul 5.** *Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale cu diferenţială exactă :*

*a)* $x'(t) = -\dfrac{2tx(t) - 2x^3(t)}{t^2 - 6tx^2(t)}$, *b)* $xe^t dt + (x + e^t)dx = 0$,

*c)* $(t + e^t \sin x)dt + (e^t \cos x + \sin x)dx = 0$,

*d)* $(t^2 + \sin x)dt + (1 + t\cos x)dx = 0$,

*e)* $(\sin x + (1 - x)\cos t)\, dt + ((1 + t)\cos x - \sin t)\, dx = 0$.

**Rezolvare :** a) Determinăm soluţia generală a ecuaţiei

$$x'(t) = -\frac{2tx(t) - 2x^3(t)}{t^2 - 6tx^2(t)}, t \in \mathbb{D} \subset \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2; t^2 - 6tx^2 \neq 0\right\}. \tag{6}$$

Se observă că ecuaţia este echivalentă cu

$(2tx - 2x^3)\, dt + (t^2 - 6tx^2)\, dx = 0, \forall (t,x) \in \mathbb{D}$ a.î. $t^2 - 6tx^2 \neq 0$.

Notăm $\mathbb{D}$ domeniu simplu conex, $\mathbb{D} \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^2; t^2 - 6tx^2 \neq 0\}$ şi

$\begin{cases} P : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, P(t,x) = 2tx - 2x^3 \\ Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, Q(t,x) = t^2 - 6tx^2. \end{cases}$

Verificăm dacă ecuaţia (6) este cu diferenţială exactă.

$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = 2t - 6x^2, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 2t - 6x^2, \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$

Atunci

$\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 0, \forall (t,x) \in \mathbb{D}$,

adică ecuaţia $(a)$ este cu diferenţială exactă.

Determinăm funcţia $F : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clasa $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{D}$, din a cărei diferenţială să provină ecuaţia, adică

$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 2tx - 2x^3, \forall (t,x) \in \mathbb{D}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = t^2 - 6tx^2, \forall (t,x) \in \mathbb{D}. \end{cases}$

Sistemul anterior este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscuta $F(t,x)$. Îl rezolvăm.

$\int \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)\, dt = \displaystyle\int \left(2tx - 2x^3\right) dt \Rightarrow$

$F(t,x) = xt^2 - 2x^3 t + \varphi(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}$,

unde $\varphi(x)$ este o funcţie necunoscută, constantă în raport cu variabila de integrare $t$. Determinăm $\varphi$ folosind a doua ecuaţie din sistem. Derivăm ultima relaţie în raport cu $x$ $\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = t^2 - 6x^2 t + \dfrac{d\varphi}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D}$.

Înlocuim $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = Q(t,x)$

$t^2 - 6tx^2 = t^2 - 6x^2t + \frac{d\varphi}{dx}(x), \forall (t,x) \in \mathbb{D} \Rightarrow$

$\frac{d\varphi}{dx}(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$.Înlocuim în expresia lui $F$

$$F(t,x) = xt^2 - 2x^3t + c_1, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \text{ şi } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Cu $F$ determinată, obţinem că soluţia generala a ecuaţiei $(a)$ este data sub forma implicită de

$$F(t,x) = c_2, c_2 \in \mathbb{R},$$

adică, notând $c = c_2 - c_1$, de

$$xt^2 - 2x^3t = c, \forall (t,x) \in \mathbb{D} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

**Exerciţiul 6.** *Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare :*

*a)* $x'(t) = -2tx(t) + t^3, t \in D$, *b)* $tx'(t) = x(t) + t^2, t \in D$,

*c)* $\frac{dx}{dt}(t) = x(t)\operatorname{ctg} t + 2t\sin t$ *d)* $\frac{dx}{dt}(t) = x(t) + \sin t$,

*e)* $(\sin 2t)\,x'(t) + 2x(t)\sin^2 t = 2\sin t$, *f)* $x'(t) - 2x(t) = -8t^2$.

**Rezolvare :** a) Fie

$$x'(t) = -2tx(t) + t^3, t \in D.$$

Pentru $t$, variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, căutăm $x = x(t)$ funcţie necunoscută. Se observă că ecuaţia este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases} a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a(t) = -2t, \\ b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, b(t) = t^3. \end{cases}$$

**Metoda I (variaţiei constantelor a lui Lagrange).**

1. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene ataşate ecuaţiei $(a)$,

$x'(t) = -2tx(t), t \in \mathbb{R}$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.

$$\int \frac{dx}{x} = \int -2tdt \Rightarrow$$

$$\ln|x| = -t^2 + \ln k, \forall t \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ şi } k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$$

$$|x(t)| = ke^{-t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ şi } k \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$$

$$x_0(t,c) = ce^{-t^2}, \forall t \in \mathbb{I}_x \text{ a.î. } x(t) \neq 0 \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei omogene.

2. Determinăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, folosind metoda variaţiei constantelor, de forma

$$x_p(t) = u(t)\, e^{-t^2}, \forall t \in \mathbb{R},$$

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă care se determină impunând ca $x_p$ dată anterior să verifice ecuaţia dată, adică

$u'(t)\, e^{-t^2} + u(t)\left(-2te^{-t^2}\right) = -2tu(t)\, e^{-t^2} + t^3, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow u'(t) = t^3 e^{t^2}, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \int u'(t)\, dt = \int t^3 e^{t^2} dt.$

Determinăm

$\int t^3 e^{t^2} dt = \int \frac{1}{2} t^2 \left(e^{t^2}\right)' dt = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \int \frac{1}{2}\left(e^{t^2}\right)' dt = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2} + c, \forall t \in \mathbb{R}$ şi $c \in \mathbb{R}$.

Atunci

$u(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2} + 0, \forall t \in \mathbb{R}.$

S-a ales constanta 0 deoarece se caută o soluţie particulară $x_p$. Se înlocuieşte expresia lui $u$ în cea a lui $x_p$ şi se obţine

$$x_p(t) = \left[\frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2}\right] e^{-t^2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Etapa3 : Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t), \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

adică

$$x(t) = e^{-t^2}\left[c + \frac{1}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2}\right], \forall t \in \mathbb{R} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$$

**Metoda II**

Se înmulţeşte ecuaţia cu

$$e^{-\int a(t) dt} = e^{\int 2t dt} = e^{t^2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

În calculul integralei nedefinite ce apare în formula anterioară se cosideră constanta 0, deoarece se utilizează un singur factor integrant. Se înmulţeşte ecuaţia $(a)$ cu $e^{t^2} \Rightarrow$

$$x'(t)\, e^{t^2} = -2tx(t)\, e^{t^2} + t^3 e^{-t^2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se trec termenii ce conţin $x$, $x'$ în membrul stâng$\Rightarrow$

$$x'(t)\, e^{t^2} + x(t)\left(2te^{t^2}\right) = t^3 e^{t^2}, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(x\left(t\right)e^{t^2}\right)=t^3e^{t^2},\forall t\in\mathbb{R}$$

$$x\left(t\right)e^{t^2}=\int t^3e^{t^2}dt,\forall t\in\mathbb{R}$$

$$x\left(t,c\right)=e^{-t^2}\left[\frac{1}{2}t^2e^{t^2}-\frac{1}{2}e^{t^2}+c\right],\forall t\in\mathbb{R}\text{ şi }c\in\mathbb{R}.$$

Ultima relaţie reprezintă soluţia generală a ecuaţiei $(a)$, sub formă explicită. Domeniul de definiţie a soluţiilor este chiar $\mathbb{R}$, pentru fiecare $c\in\mathbb{R}$.

**Exerciţiul 7.** *Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:*

$a)\begin{cases}x'=\dfrac{-2}{t^2-1}x+2\left(t+1\right)\\x\left(0\right)=-3.\end{cases}$ ,$b)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}(t)\sin t-x(t)\cos t=-\dfrac{\sin^2 t}{t^2}\\\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0\end{cases}$ ,

$c)\begin{cases}x'+\dfrac{1}{t-2}x=3t\\x\left(3\right)=4.\end{cases}$ .

**Rezolvare :** a) Fie

$$x'\left(t\right)=\frac{-2}{t^2-1}x\left(t\right)+2\left(t+1\right),t\in D.$$

Pentru $t$ variabilă independentă din domeniul de definiţie al soluţiei, căutăm funcţia $x=x\left(t\right)$, funcţie necunoscută, soluţie pentru ecuaţia $(a)$. Apoi impunem asupra soluţiei generale condiţia iniţială şi determinăm acea soluţie particulară ce verifică condiţia iniţială. Se observă că ecuaţia $(a)$ este ecuaţie diferenţială liniară de ordin întâi neomogenă, cu

$$\begin{cases}a\left(t\right)=\dfrac{-2}{t^2-1},t\neq\pm1\\b\left(t\right)=2\left(t+1\right).\end{cases}$$

Ecuaţia se poate rezolva prin una din cele două metode descrise în exerciţiul anterior. Se obţine :

$$x\left(t,c\right)=\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\left[c+\int2\left(t+1\right)\left|\frac{t-1}{t+1}\right|dt\right],\forall t\in\mathbb{I}\text{ şi }c\in\mathbb{R}.$$

Pentru $\mathbb{I}\subseteq(-\infty,-1)$ sau $\mathbb{I}\subseteq(1,+\infty)\Rightarrow$

$$x\left(t,c\right)=\frac{t+1}{t-1}\left(c+t^2-2t\right),\forall t\in\mathbb{I}\text{ şi }c\in\mathbb{R}.\tag{7}$$

Pentru $\mathbb{I} \subseteq (-1,1)$,

$$x(t,c) = \frac{t+1}{t-1}\left(-c+t^2-2t\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Relaţiile (7) şi (8) dau cele două familii de soluţii generale ale ecuaţiei.

Impunem asupra soluţiei generale condiţia iniţială $x(0) = -3$, adică $(t_0, x_0) = (0,-3)$. Cum $t_0 = 0 \in \mathbb{I} \subseteq (-1,1)$ înlocuim $(t_0, x_0) = (0,-3)$ în (8)$\Rightarrow$

$-3 = \frac{0+1}{0-1}\left(-c+0^2-2\cdot 0\right) \Rightarrow c = -3$.Înlocuim $c = -3$

$x(t) = \frac{t+1}{t-1}\left(3+t^2-2t\right), \forall t \in \mathbb{I} \text{ şi } c \in \mathbb{R}.$

Ultima relaţie reprezintă soluţia ecuaţiei, sub formă explicită, ce verifică $x(0) = -3$.

**Exerciţiul 8.** *Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale :*

*a)* $(e^t + x + \sin x)dt + (e^x + t + t\cos x)dx = 0$,

*b)* $x'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{\sqrt{1+x^2(t)}}{x(t)}$

*c)* $(\arcsin t + 2tx)dt + (t^2 + 1 + \operatorname{arctg} x)dx = 0$,

*d)* $x' + \frac{tx}{1-t^2} = \arcsin t + t$,

*e)* $x'(t) = \frac{t}{1+t}(1-x)$,

*f)* $(4t^2 + 2tx + x^2)dt + (4x^2 + 2tx + t^2)dx = 0$,

*g)* $x'(t) = \left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{x^2+1}{x^2+2}$,

*h)* $tx' - x = t^2 - 2t + 3$,

*i)* $(xe^{tx} - 4tx)dt + (te^{tx} - 2t^2)dx = 0$,

*j)* $x' + 2tx = t^3$,

*k)* $(\frac{1}{x} - \frac{x}{t^2})dt + (\frac{1}{t} - \frac{t}{x^2})dx = 0$.

## 2. Tema

**Exerciţiul 9.** *Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale:*

*a)* $x(t)x'(t) + 2t\sqrt{4-x^2(t)} = 0, x(0) = 1, x \in (0,2)$

*b)* $x'(t) = \frac{t^2x^2(t)}{1+x^2(t)}, x(0) = 1.$

*c)* $x'(t) = \frac{1}{t}x(t) - \ln t, x(1) = 1.$

*d)* $x'(t) = -\frac{2tx(t) - 2x^3(t)}{t^2 - 6tx^2(t)}.$